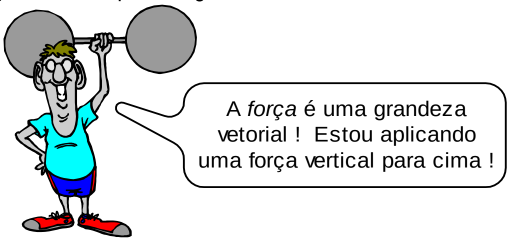
Aula 01 — Vetores

1. Grandezas escalares e grandezas vetoriais

Na natureza, algumas grandezas físicas ficam bem definidas quando lhes é atribuído um valor numérico (módulo) e uma unidade de medida. São as chamadas **grandezas escalares**. Essas grandezas não têm nenhuma orientação e a sua aritmética é simples como a utilizada no caixa de uma padaria. Dentre elas, podemos citar massa, tempo, comprimento, temperatura, energia, corrente elétrica, resistência elétrica, potência.

Entretanto, existem grandezas que, além de um valor numérico (módulo) e uma unidade de medida, também recebem uma orientação, caracterizada por uma direção e um sentido. São as chamadas **grandezas vetoriais.** As operações matemáticas com essas grandezas precisam levar em conta não só o valor numérico, mas também a sua orientação. Assim, lançamos mão da geometria para nos auxiliar nas operações matemáticas com essas grandezas. Deslocamento, velocidade, aceleração, força, impulso , quantidade de movimento, velocidade angular, momento de uma força são exemplos de grandezas vetoriais.



2. Vetores

Para representar as grandezas físicas orientadas (vetoriais), utilizamos um ente geométrico denominado Vetor. Trata-se de um segmento de reta orientado (orientação dada pela flecha) que apresenta uma direção, um sentido e um módulo, que está relacionado com o comprimento do vetor. Um vetor, portanto, pode representar qualquer grandeza física vetorial.

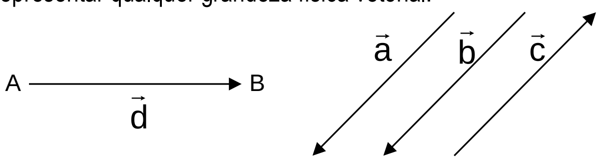


figura 1

A figura ilustra o vetor $\overrightarrow{AB}$ que tem direção horizontal, sentido da esquerda para a direita e módulo dado pelo comprimento $\overline{AB}$. O vetor $\overrightarrow{AB}$ também pode ser simplesmente designado por uma única letra minúscula $\vec{d}$. Para nos referirmos apenas ao módulo do vetor $\vec{d}$, podemos usar o símbolo $|\vec{d}\,|$ ou simplesmente **d.**

Dizemos que dois vetores são iguais, se e somente se, apresentarem a mesma direção (forem paralelos), o mesmo sentido (flecha) e mesmo módulo (comprimento). Sendo assim, podemos dizer que:

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \text{e} \quad \vec{a} \neq \vec{d} \neq \vec{c}\,.$$

Os vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são iguais apenas em módulo e direção. Simbolicamente, podemos escrever $|\vec{b}\,| = |\vec{c}\,|$ apesar de $\vec{b} \neq \vec{c}$.

3. Operação com vetores – soma vetorial

Conforme dito, um vetor pode representar qualquer grandeza vetorial. Assim, para ilustrar a operação da "soma vetorial", utilizaremos vetores que representam o deslocamento de uma pessoa, que têm sua origem no ponto de partida e, sua extremidade, no ponto de chegada.

Imagine que uma pessoa partiu do ponto A e fez o percurso ABCD parando no ponto D. Cada um dos seus deslocamentos parciais AB, BC e CD podem ser representados, respectivamente, pelos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ conforme a figura 2. O deslocamento resultante dessa pessoa é representado pelo vetor $\vec{r}$, que parte do ponto inicial A e tem sua extremidade no ponto final D como mostra a figura 3. Dizemos que $\vec{r}$ é a soma vetorial ou a resultante dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e, simbolicamente, escrevemos:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

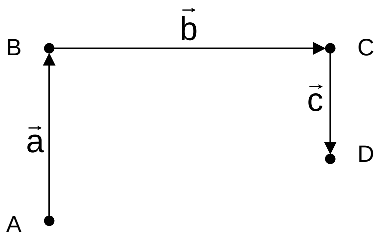


figura 2

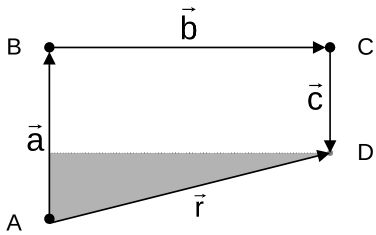


figura 3

Admitindo que os módulos dos deslocamentos valem $|\vec{a}\,| = 9$ km, $|\vec{b}\,| = 8$ km e $|\vec{c}\,| = 3$ km, a fim de obter o vetor $\vec{r}$, você **<u>não</u>** deve efetuar o cálculo:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 9 + 8 + 3 = 20 \text{ km}$$

Afinal de contas, a expressão acima **<u>não</u>** se trata de uma soma algébrica ou soma escalar. As flechinhas sobre cada letra indicam que estamos realizando uma soma vetorial ou geométrica e que **<u>não</u>** se pode substituir diretamente os valores numéricos na expressão. Devemos fazer uso das propriedades da geometria e, a partir do diagrama dos vetores ilustrado na figura 3, obter o módulo do vetor $\vec{r}$.

A partir do Teorema de Pitágoras, o triângulo hachurado na figura 3 nos permite escrever :

$$(a–c)^2 + (b)^2 = (r)^2 \Rightarrow (9–3)^2 + (8)^2 = (r)^2 \Rightarrow r = 10 \text{ km}$$

Assim, sempre que desejarmos calcular o resultado de uma operação com vetores, é preciso primeiro traçar o diagrama vetorial e, só em seguida, utilizar a geometria plana para efetuar a operação.

Em linhas gerais, para se obter a resultante entre vários vetores, basta dispor os vetores um após o outro, com a extremidade de um na origem do próximo. O vetor soma é sempre obtido ligando a origem do primeiro à extremidade do último. Esse processo gráfico chama-se método do polígono.

A seguir, destacamos uma série de relações vetoriais existentes no diagrama da figura 4. Observe:

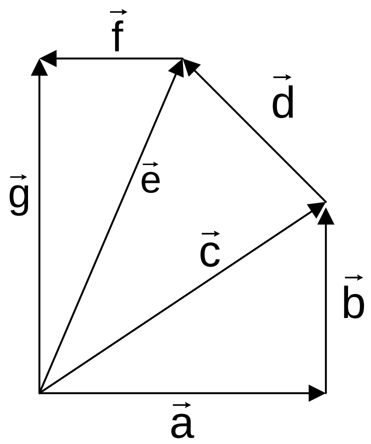


figura 4

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} + \vec{f} = \vec{g}$

mas $(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c}$, portanto:

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{d} + \vec{f} = \vec{g}$

$\vec{c} + \vec{d} + \vec{f} = \vec{g}$

mas $(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{e}$, portanto:

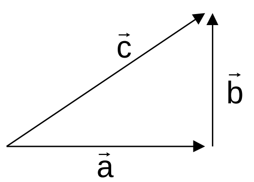
$(\vec{c} + \vec{d}) + \vec{f} = \vec{g}$

$\vec{e} + \vec{f} = \vec{g}$

As relações vetoriais acima mostram que a soma de vetores é associativa. É fácil ver que também é válida a propriedade comutativa para a adição, ou seja,

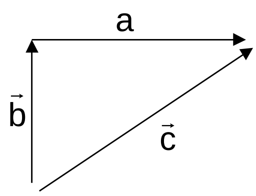
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} :$$

Graficamente, temos:



$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

figura 5



$\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$

figura 6

4. Operação com vetores – subtração de vetores

Sejam os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ mostrados na figura 7. Desejamos obter o vetor $\vec{r}$ tal que $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. Para isso, definimos o vetor oposto a $\vec{c}$, representado por $-\vec{c}$. Note que os vetores $\vec{c}$ e $-\vec{c}$ têm o mesmo módulo (comprimento), mesma direção (são paralelos) e sentidos opostos (flechas contrárias) como na figura 7.

O vetor $-\vec{c}$ não se trata de um vetor negativo, afinal de contas, um vetor é um ente geométrico e, assim como não existem quadrados negativos ou triângulos negativos, não existem vetores negativos. Apenas, da mesma forma que existe um vetor chamado $\vec{c}$, também existe um vetor chamado $-\vec{c}$, é o nome dele, chama-se vetor "menos cê ".

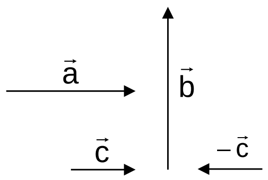


figura 7

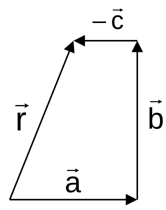


figura 8

Assim, reescrevemos a expressão $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ como $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$ e traçamos o diagrama vetorial naturalmente, dispondo os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $(-\vec{c})$ em série, um após o outro e traçando o vetor resultante $\vec{r}$ como mostra a figura 8. Mais uma vez, determinaremos o módulo de $\vec{r}$ com base na geometria da figura.

5. Método gráfico do paralelogramo

Para determinar a resultante entre vários vetores através do método do polígono, vimos que devemos dispor um vetor após o outro (figura 9a), com a extremidade de um coincidindo com a origem do seguinte (em série). O vetor resultante é obtido ao final, ligando a origem do primeiro vetor à extremidade do último (figura 9b).

Uma forma alternativa de se traçar a resultante entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ que formam um ângulo α entre si é através do método do paralelogramo. Nesse método, que se aplica a apenas dois vetores de cada vez, devemos dispor os dois vetores de forma que suas origens fiquem coincidentes (figura 9c). Traçando-se as retas paralelas **r** e **s**, determinamos um paralelogramo. Traçando-se a diagonal desse paralelogramo (figura 9d) a partir da origem dos vetores, determina-se o vetor resultante $\vec{r}$ tal que $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$.

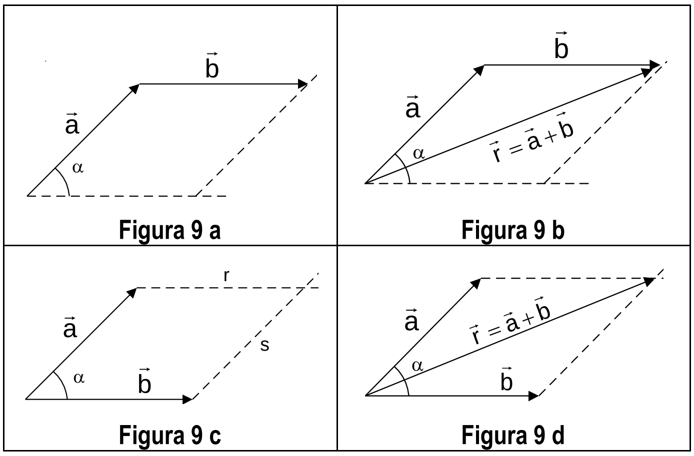


Figura 9 a **Figura 9 b** **Figura 9 c** **Figura 9 d**

É fácil ver que os traçados gráficos mostrados na figura 9b e 9d são equivalentes e determinam o mesmo vetor $\vec{r}$, por qualquer um dos métodos. A partir da lei dos cossenos, pode-se demonstrar que, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são dois vetores que formam um ângulo α entre si (figura 9d), a resultante $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$ tem módulo dado pela relação:

$$\boxed{r^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\alpha}$$

Para uma importante revisão de geometria plana, veja a página 7.

6. Ângulo formado entre dois vetores

O ângulo α formado entre dois vetores, por definição, é o menor ângulo determinado entre eles **quando suas origens estão coincidentes**.

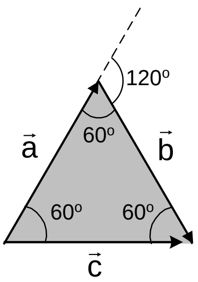


Figura 10

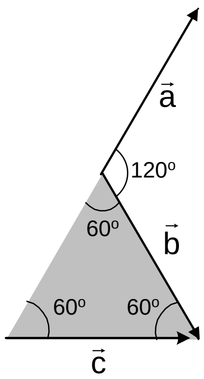


Figura 11

Para esclarecer melhor, considere os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ apoiados sobre um triângulo eqüilátero na figura 10. Observando apenas os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, alguém, à primeira vista, poderia julgar que o ângulo formado entre eles é de 60°, o que estaria errado visto que suas origens não estão coincidentes.

Assim, ainda é preciso mover um dos vetores paralelamente a si a fim de tornar a sua origem coincidente com a do outro, como sugere a figura 11. Portanto, o ângulo α formado entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não será 60°, mas sim, o seu suplemento 180° – 60° = 120°.

Já os vetores $\vec{a}$ e $\vec{c}$, na figura 10, têm origens coicindentes e, portanto, o ângulo formado entre eles realmente vale 60°, assim como o ângulo formando entre $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

7. Decomposição de vetores

A decomposição de vetores é uma ferramenta muito útil na análise de problemas de Física. Seja um vetor genérico $\vec{F}$. Estamos interessados em determinar as componentes horizontal e vertical $\vec{F}x$ e $\vec{F}y$ do vetor $\vec{F}$.

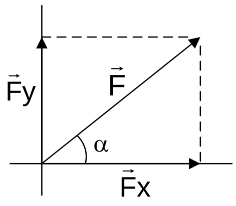


Figura 12 a

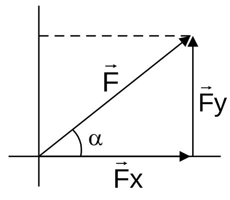


Figura 12 b

Para isso, posicionamos o vetor $\vec{F}$ na origem de um sistema de eixos cartesianos e determinamos as projeções desse vetor sobre os eixos x e y (figura 12 a). Os vetores projeções $\vec{F}x$ e $\vec{F}y$ mostrados na figura 12 claramente satisfazem a <u>relação vetorial</u> $\vec{F} = \vec{F}x + \vec{F}y$.

Observando o triângulo retângulo da figura 12b, é fácil ver que:

$$\boxed{\text{sen}\,\alpha = \frac{Fy}{F} \Rightarrow Fy = F\,.\,\text{sen}\alpha}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{Fx}{F} \Rightarrow Fx = F\,.\,\cos\alpha}$$

Adicionalmente, pelo teorema de Pitágoras, os módulos dos vetores projeções $\vec{F}x$ e $\vec{F}y$ satisfazem a <u>relação algébrica</u>:

$$\boxed{(F)^2 = (F_x)^2 + (Fy)^2}$$

A seguir, ilustramos uma aplicação clássica da decomposição de forças em Mecânica.

Exemplo resolvido 1: Uma caixa de peso P = 120 N encontra-se apoiada sobre um plano inclinado liso que forma um ângulo α = 36° com a horizontal e escorrega ladeira abaixo. Determine o valor da componente do peso responsável pelo movimento da caixa. Dado α = 36° , sen36° = 0,6 cos36° = 0,8

Solução:

A figura 13a mostra as duas forças aplicadas sobre a caixa: o peso P exercido pela Terra e a reação normal N exercida pelo plano inclinado.

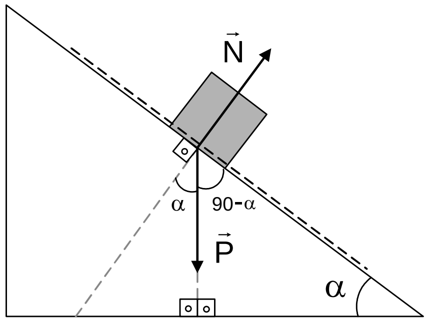


figura 13a

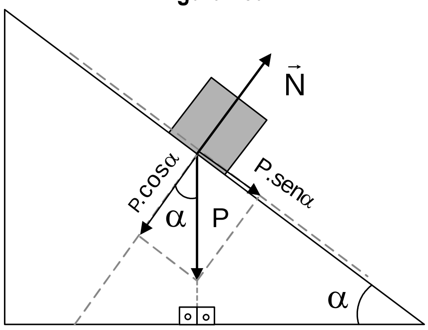


figura 13b

Se o plano inclinado forma um ângulo α com a horizontal, é fácil perceber que a força peso P também forma um ângulo α com a direção da normal N. Assim, decompondo a força peso em suas componentes (figura 13b), temos que:

P.senα = P. sen36° = 120 x 0,6 = 72 N
P.cosα = P. cos36° = 120 x 0,8 = 96 N

Estando a caixa em equilíbrio na direção normal, temos N = P.cosα = 96 N. A componente P.senα = 72 N é a responsável pelo movimento da caixa ladeira abaixo.

Exemplo resolvido 2 : Uma bola de tênis, movendo-se com velocidade $\vec{V}_1$ de módulo 40 m/s, colide elasticamente com o solo horizontal de acordo com a figura 14 e retorna com velocidade $\vec{V}_2$ de mesmo módulo 40 m/s.
Dado sen54° = 0,8 cos54° = 0,6 , pergunta-se:

a) É correto afirmar que $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ e, portanto, que $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{0}$?

b) Caso contrário, determine o valor da variação da velocidade vetorial $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ da bola na colisão.

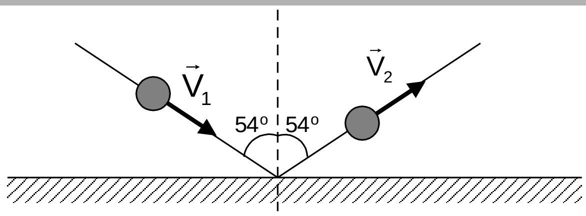


figura 14

Solução:

a) Os vetores $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ certamente NÃO são idênticos, pois têm orientações diferentes. Apenas apresentam o mesmo módulo, portanto $\vec{V}_1 \neq \vec{V}_2$ e $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \neq \vec{0}$.

b) $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1)$, ou seja, devemos achar a resultante (+) entre os vetores $\vec{V}_2$ e $-\vec{V}_1$

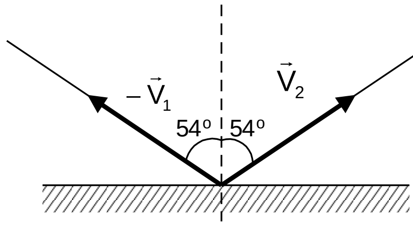


figura 15

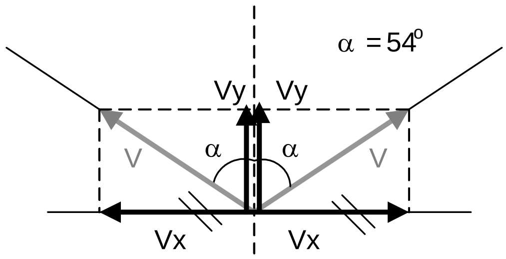


figura 16

O vetor $-\vec{V}_1$ é obtido invertendo-se a flecha do vetor $\vec{V}_1$. A figura 15 ilustra o diagrama vetorial preparado para que se determine a resultante $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1)$.

Na figura 16 , tomamos $|\vec{V}_2| = |-\vec{V}_1| = V = 40$ m/s e decompomos os vetores para achar a resultante:

Na horizontal, as componentes Vx se cancelam e a resultante será puramente vertical, de módulo:

$|\Delta\vec{V}|$ = Vy + Vy = 2.V.cos α = 2 x 40 x 0,6 = 48 m/s
$|\Delta\vec{V}|$ = 48 m/s

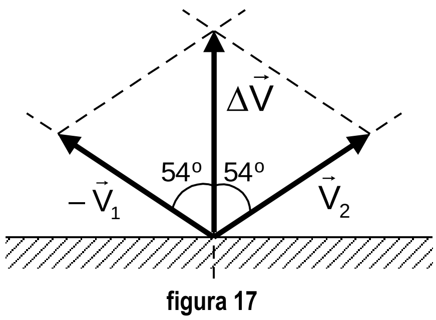


figura 17

Assim o vetor diferença $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1)$ é vertical, apontando para cima (figura 17) e tem módulo dado por $|\Delta\vec{V}|$ = 48 m/s

8. Multiplicação de um vetor por um número

Seja um vetor $\vec{a}$. O resultado da multiplicação desse vetor por um número real **n** é um outro vetor de mesma direção de $\vec{a}$ (paralelo a $\vec{a}$) e cujo sentido depende do sinal de **n**. Observe a figura 18:

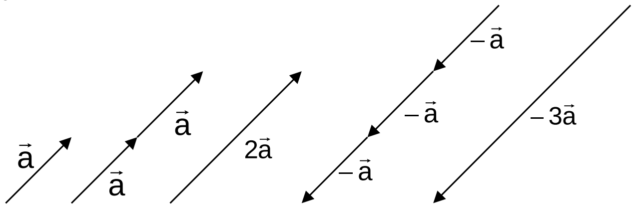


figura 18

Nota-se que o vetor $2\vec{a}$ é paralelo ao vetor $\vec{a}$, tem a mesma direção e sentido de $\vec{a}$ e módulo (comprimento) duas vezes maior que $\vec{a}$. Já o vetor $-3\vec{a}$ tem a mesma direção de $\vec{a}$ (são paralelos) e sentido contrário de $\vec{a}$ (flecha invertida) e módulo 3 vezes maior que $\vec{a}$.

Assim, generalizando:

- Se $\vec{b} = \mathbf{n}.\,\vec{a}$ com $\mathbf{n} \in R$, então o vetor $\vec{b}$ é paralelo ao vetor $\vec{a}$
- Se $\mathbf{n} > 0$, os vetores $\vec{b}$ e $\vec{a}$ apontarão no mesmo sentido
- Se $\mathbf{n} < 0$, os vetores $\vec{b}$ e $\vec{a}$ apontarão em sentidos opostos
- Se $\vec{b} = \mathbf{n}.\,\vec{a} \Rightarrow |\vec{b}| = |\mathbf{n}.\,\vec{a}| \Rightarrow |\vec{b}| = |\mathbf{n}|\,.\,|\vec{a}| \Rightarrow b = \mathbf{n}.\,a$

Grandeza	Relação vetorial	Conseqüência matemática da relação vetorial
Força $\vec{F}$	$\vec{F} = m.\vec{a}$	Como a massa **m** de um corpo é sempre positiva (**m** > 0), concluímos que a aceleração $\vec{a}$ causada por uma força $\vec{F}$ está sempre na mesma direção e sentido da referida força.
Força elétrica $\vec{Fe}$	$\vec{Fe} = q.\vec{E}$	A força elétrica $\vec{Fe}$ é sempre paralela ao campo elétrico $\vec{E}$ que a transmite. • Se $\mathbf{q} > 0$, $\vec{Fe}$ e $\vec{E}$ terão o mesmo sentido • Se $\mathbf{q} < 0$, $\vec{Fe}$ e $\vec{E}$ terão sentidos opostos
Quantidade de Movimento $\vec{Q}$	$\vec{Q} = m.\vec{V}$	Como a massa **m** de um corpo é sempre positiva (**m** > 0), concluímos que a quantidade de movimento $\vec{Q}$ de um móvel está sempre na mesma direção e sentido da sua velocidade $\vec{V}$
Impulso de uma força $\vec{I}$	$\vec{I} = \vec{F}.\Delta t$	Como Δt é sempre positivo ($\Delta t > 0$), concluímos que o Impulso $\vec{I}$ aplicado por uma força está sempre na mesma direção e sentido da referida força $\vec{F}$.

Muitas grandezas vetoriais na Física são definidas pelo produto entre um número real **n** e um outro vetor. A tabela nessa página mostra alguma dessas grandezas, bem como a interpretação física.

Se o estudante conhece bem as propriedades matemáticas dos vetores, ele percebe que as conclusões mostradas na tabela anterior são meras conseqüências matemáticas da relação vetorial que define essas grandezas. Isso significa que essas conclusões não merecem ser memorizadas. O aluno deve ser capaz de reproduzi-las por si só posteriormente, sempre que se deparar com aquelas relações vetoriais.

9. Propriedade do polígono fechado de vetores

Se n vetores, dispostos em série, um após o outro, formam um polígono fechado, então a resultante desses vetores é nula.

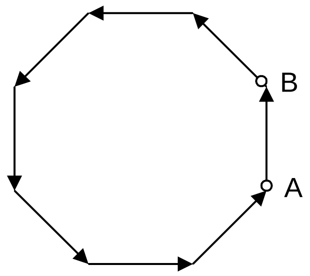


figura 19

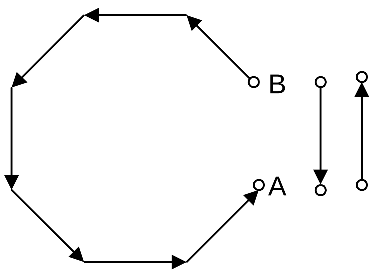


figura 20

Para compreender melhor o significado dessa propriedade, considere os 8 vetores da figura 19 dispostos num polígono fechado. Se uma pessoa parte do ponto A, segue no sentido anti-horário o caminho formado pela série de vetores e retorna ao ponto A, qual o deslocamento efetivo dessa pessoa ? Certamente é nulo. Essa é uma forma simples de entender a propriedade do polígono fechado de vetores. A resultante de todos os vetores é nula.

Uma outra forma de visualizar que a resultante dos vetores é nula consiste em, inicialmente, determinar a resultante de todos os vetores exceto um deles, por exemplo, o vetor $\overrightarrow{AB}$, como indica a figura 20. Em seguida, somamos a resultante de todos os vetores exceto $\overrightarrow{AB}$ com o vetor $\overrightarrow{AB}$ faltante e, assim, obtemos a resultante final de todos os vetores.

A resultante dos 7 vetores na figura 20, partindo de B e percorrendo no sentido anti-horário o caminho de vetores, até o ponto A é dada, graficamente, pelo vetor $\overrightarrow{BA}$. Agora somando a resultante dos 7 vetores $\overrightarrow{BA}$ com o 8º vetor $\overrightarrow{AB}$ que foi temporariamente deixado de fora, temos:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

Essa é uma forma mais elaborada de entender a propriedade do polígono fechado de vetores. A recíproca dessa propriedade também é verdadeira, ou seja:

Se n vetores tem resultante nula, então eles formam um polígono fechado quando dispostos em série, um após o outro.

Essa recíproca é muito útil na solução de problemas de Estática.

Note que o símbolo $\vec{0}$ deve ser lido como "vetor nulo" e não, "zero". Da mesma forma, uma matriz 2x2 toda preenchida com zeros é chamada de "matriz 2x2 nula" e não, "matriz zero".

Um número real qualquer como o zero (0) pertence a um espaço de uma única dimensão R. Um vetor no plano pertence a um espaço de duas dimensões R^2 e um vetor no espaço pertence a um espaço de três dimensões R^3. Elementos que pertencem a espaços diferentes não são comparáveis. Muitos estudantes fazem mal uso da simbologia de vetores por não atentarem para esses fatos.

10. Representação i, j para vetores

Chamamos de "versores unitários" um conjunto de vetores que apresentam módulo unitário e que são utilizados apenas para indicar uma direção. Os versores mais utilizados universalmente são o **i** e o **j.**

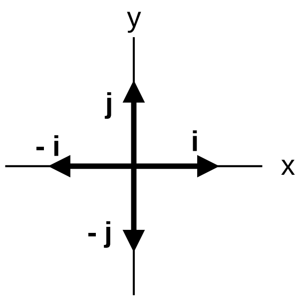


figura 21

O versor **i** trata-se de um vetor unitário | **i** | = 1 que aponta na direção positiva do eixo x ao passo que o versor **j** é um vetor unitário | **j** | = 1 que aponta no sentido positivo do eixo y (figura 21) .

A notação vetorial utilizando os versores unitários **i** e **j** é bastante prática. Por exemplo, considere o vetor $\vec{a}$ mostrado na figura 22, cujas componentes são ax = 3 e ay = 4. Na notação **i j**, esse vetor pode ser representado como:

$$\vec{a} = ax.\mathbf{i} + ay.\mathbf{j} \quad \text{ou} \quad \vec{a} = 3.\mathbf{i} + 4.\mathbf{j}\,.$$

O módulo de $\vec{a}$ é dado pelo teorema de Pitágoras:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(ax)^2 + (ay)^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$$

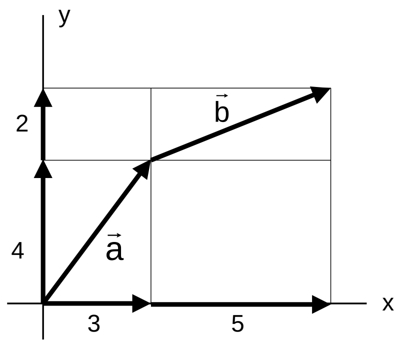


figura 22

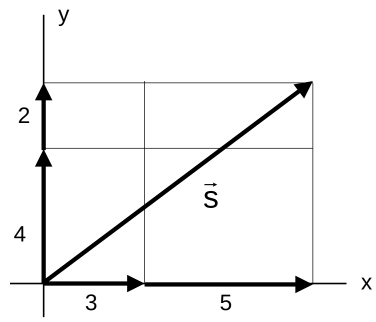


figura 23

O vetor $\vec{b}$ pode ser representado por $\vec{b} = 5.\mathbf{i} + 2.\mathbf{j}$.

A grande vantagem da notação **i j** é que as operações com vetores passam a ser algébricas. Veja:

O vetor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ é dado por:

$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = 3.\mathbf{i} + 4.\mathbf{j} + 5.\mathbf{i} + 2.\mathbf{j} \quad \therefore \quad \vec{S} = 8.\mathbf{i} + 6.\mathbf{j}$

O módulo de $\vec{S}$ é dado por

$|\vec{S}| = \sqrt{(sx)^2 + (sy)^2} = \sqrt{(8)^2 + (6)^2} \quad \therefore \quad |\vec{S}| = 10$

O vetor diferença $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ também pode ser facilmente determinado:

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (3.\mathbf{i} + 4.\mathbf{j}) - (5.\mathbf{i} + 2.\mathbf{j}) = -2.\mathbf{i} + 2.\mathbf{j}$

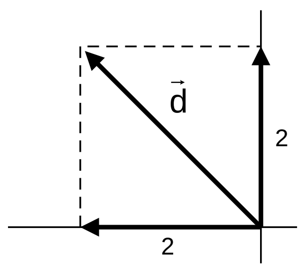
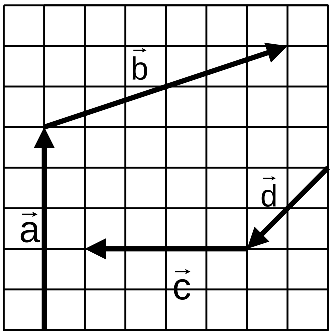


figura 24

A representação gráfica do vetor diferença $\vec{d}$ é mostrada na figura 24. O exemplo resolvido 2 mostra como é prático se trabalhar com a notação i j para vetores. As figuras 22 e 23 permitem ao estudante perceber o que realmente está ocorrendo quando somamos dois vetores: na verdade, suas projeções é que são somadas, no sentido real da palavra, para em seguida, determinarmos graficamente o vetor resultante $\vec{S}$.

Exemplo resolvido 3 : Determine o módulo da resultante entre os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ ilustrados na figura. Considere que cada célula é quadrada de lado unitário.



Solução:
Inicialmente escrevemos cada vetor na notação **i j** :

$\vec{a} = 0.\mathbf{i} + 5.\mathbf{j}$ $\qquad$ $\vec{b} = 6.\mathbf{i} + 2.\mathbf{j}$

$\vec{c} = -4.\mathbf{i} + 0.\mathbf{j}$ $\qquad$ $\vec{d} = -2.\mathbf{i} - 2.\mathbf{j}$

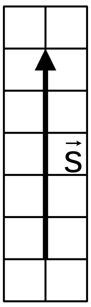
*Em seguida, efetuamos a soma operando as componentes **i** e **j** individualmente:*

$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} =$

$\vec{s} = 0.\mathbf{i} + 5.\mathbf{j} + 6.\mathbf{i} + 2.\mathbf{j} - 4.\mathbf{i} + 0.\mathbf{j} - 2.\mathbf{i} - 2.\mathbf{j}$

$\vec{s} = 0.\mathbf{i} + 5.\mathbf{j} \quad \therefore \quad \vec{s} = +5.\mathbf{j}$

O vetor $\vec{s} = +5.\mathbf{j}$ está mostrado na figura ao lado e seu módulo é dado por :



$|\vec{s}| = \sqrt{(sx)^2 + (sy)^2} = \sqrt{(0)^2 + (5)^2}$

$|\vec{s}| = 5$

11. Expandindo para a notação i, j e k para vetores

Da mesma forma que **i** representa um vetor de módulo unitário apontando no sentido positivo do eixo x e **j** representa um vetor de módulo unitário apontando no sentido positivo do eixo y, também se define **k** como sendo um vetor de módulo unitário apontando no sentido positivo do eixo z num sistema tridimensional xyz.

Dessa forma, poderíamos definir um vetor $\vec{a}$ tal que:

$$\vec{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

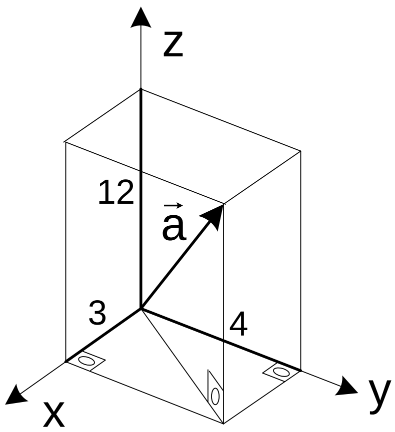
cuja representação gráfica é mostrada na figura.

O módulo do vetor $\vec{a}$ é calculado, determinando-se o comprimento da diagonal do paralelepípedo mostrado na figura, dado por:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (12)^2} = \sqrt{9 + 16 + 144}$$

$$|\vec{a}| = 13$$

Para revisar como se calcula a diagonal de um paralelepípedo, veja a propriedade 3 na página 8 – *Cálculo da Diagonal maior de um Paralelepípedo.*



12. Breve Revisão de Geometria

É importante que o aluno esteja bem familiarizado com as propriedades usuais da geometria plana, tais como Lei dos senos, Lei dos cossenos, Teorema de Pitágoras, Propriedades dos triângulos retângulos, a fim de operar com os vetores sem maiores dificuldades. Vamos a uma pequena revisão:

Propriedade 1: Lei dos Cossenos

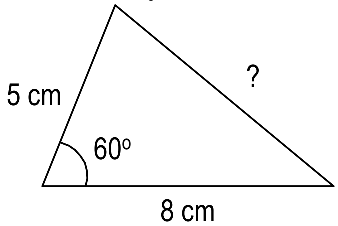
Aplicação: Calcula o 3º lado de um triângulo, do qual se conhecem dois lados e um ângulo.

esse é o lado
oposto a esse ângulo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$

Note que, na lei dos cossenos, o lado **a** que aparece no 1º membro da fórmula é sempre o lado oposto ao ângulo α.

Para exemplificar o uso da Lei dos cossenos, determinaremos, a seguir, o comprimento do 3º lado de um triângulo do qual conhecemos dois lados e um ângulo.



esse é o lado
oposto a esse ângulo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$

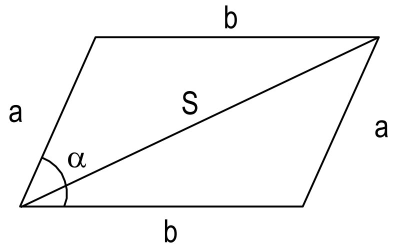
Chamaremos de α o ângulo de 60º do triângulo. O lado oposto ao ângulo α é sempre o lado **a** na lei dos cossenos e, nesse exercício, será nessa incógnita. Os lados **b** e **c** podem ser escolhidos em qualquer ordem. Assim, temos:

a = ? b = 8 cm c = 5 cm $\alpha = 60^0$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$ $a^2 = (8)^2 + (5)^2 - 2 \times 8 \times 5.\cos(60^o)$ $a^2 = 64 + 25 - 40$ $a^2 = 49$ a = 7

Assim, o lado **a** desconhecido tem um comprimento de 7 cm.

Propriedade 2: Cálculo da Diagonal de um Paralelogramo

Aplicação: Calcula o comprimento da diagonal **S** de um paralelogramo, do qual se conhecem os dois lados **a** e **b** e o ângulo α formado entre eles. A diagonal a ser calculada parte do mesmo vértice que contém o ângulo α.



essa diagonal
parte desse ângulo

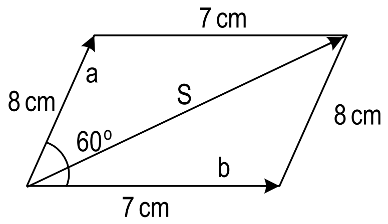
$$s^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\alpha$$

O aluno atento deve perceber que, apesar da semelhança, a fórmula acima <u>não é a lei dos cossenos,</u> não recebendo denominação alguma. Tais fórmulas são diferentes (diferem pelo sinal algébrico) pelo simples fato de que calculam coisas diferentes.

Exemplo resolvido 4 : Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, de módulos respectivamente iguais a 8 e 7, formam um ângulo $\alpha = 60^o$ entre si. Determine o módulo do vetor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

Solução:

Pelo método do paralelogramo, determinaremos a diagonal **S** que parte do ângulo $\alpha = 60^o$, com o uso da fórmula da diagonal:



Substuindo a = 8 cm, b = 7 cm, $\alpha = 60^o$ na fórmula, vem :

$s^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\alpha$

$s^2 = (8)^2 + (7)^2 + 2 \times 8 \times 7 \times (1/2)$

$s^2 = 64 + 49 + 56$

$S^2 = 169 \Rightarrow S = 13.$

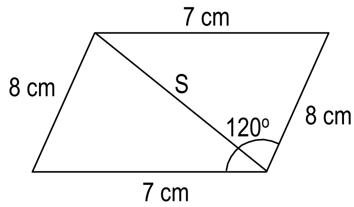
Ora, Claudete. A outra diagonal parte do ângulo de 120º, suplementar ao ângulo de 60º . Assim, Substuindo a = 8 cm, b = 7 cm, $\alpha = 120^o$ na <u>fórmula que calcula diagonais de paralelogramos</u>, lembrando que $\cos 120^o = -1/2$, vem :

$s^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\alpha$

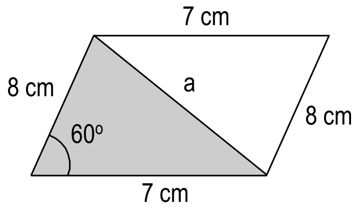
$s^2 = (8)^2 + (7)^2 + 2 \times 8 \times 7 \times (-1/2)$

$s^2 = 64 + 49 - 56$

$S^2 = 57 \Rightarrow S = \sqrt{57}$ cm



<u>A lei dos cossenos</u>, aplicada ao triângulo em destaque na figura abaixo, também permite calcular a diagonal **a**, agora interpretada como sendo <u>o 3º lado de um triângulo do qual se conhecem dois lados e um ângulo</u>. Encontraremos a mesma resposta obtida acima. Veja:



esse é o lado
oposto a esse ângulo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$

Substituindo os valores na lei dos cossenos, vem:

a = ? b = 7 cm c = 8 cm $\alpha = 60^0$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$ $a^2 = (7)^2 + (8)^2 - 2 \times 7 \times 8.\cos(60^o)$ $a^2 = 49 + 64 - 56$ $a^2 = 57$ $a^2 = 57 \Rightarrow a = \sqrt{57}$ cm

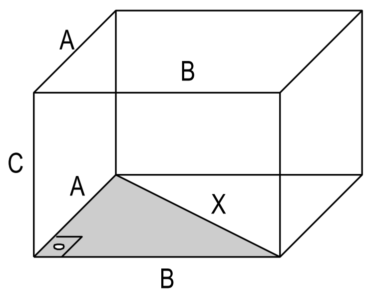
Obtivemos o mesmo resultado de antes !

O aluno atento deve perceber que a lei dos cossenos NÃO é igual à fórmula que calcula a diagonal do paralelogramo. Conforme vimos, tais fórmulas são diferentes pelo simples fato de que calculam coisas diferentes.

Propriedade 3: Cálculo da Diagonal (D) maior de um Paralelepípedo

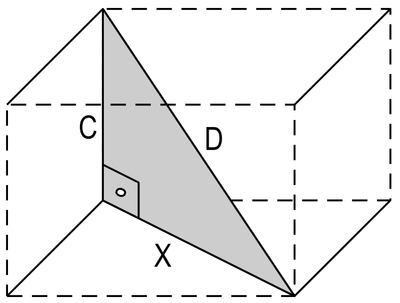
Seja um paralelepído (uma caixa de sapato) de dimensões A, B e C. O Teorema de Pitágoras, no triângulo retângulo em destaque na figura abaixo, permite escrever:

$$X^2 = A^2 + B^2 \quad \text{(I)}$$



Aplicando, mais uma vez, o Teorema de pitágoras no outro triângulo retângulo destacado a seguir, podemos escrever:

$$D^2 = C^2 + X^2 \qquad \textbf{(II)}$$



Substituindo I em II, vem:

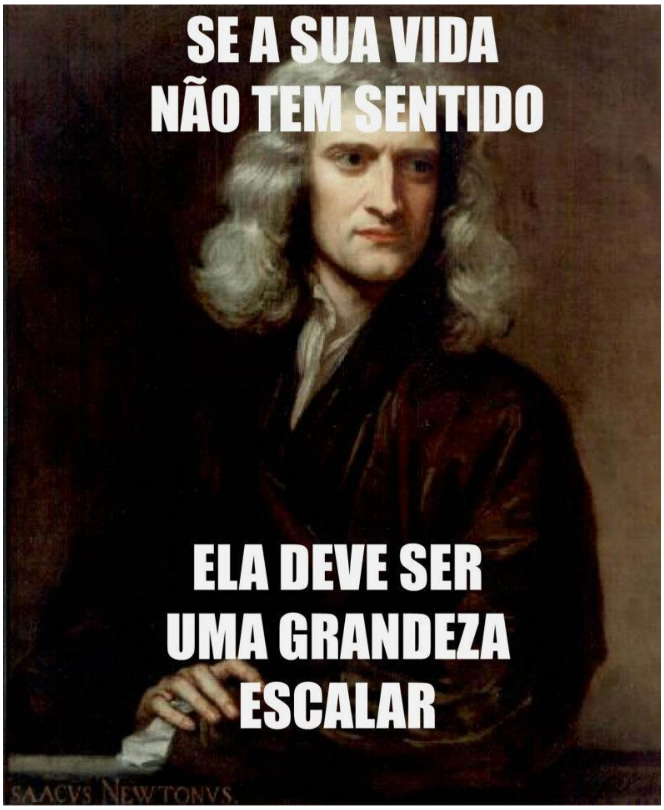
$D^2 = C^2 + X^2$

$D^2 = C^2 + (A^2 + B^2)$

$\mathbf{A^2 + B^2 + C^2 = D^2}$

A famosa relação acima calcula o comprimento da diagonal maior D de um paralelepípedo, conhecendo-se as dimensões A, B e C do mesmo.

PENSAMENTO DO DIA



☺

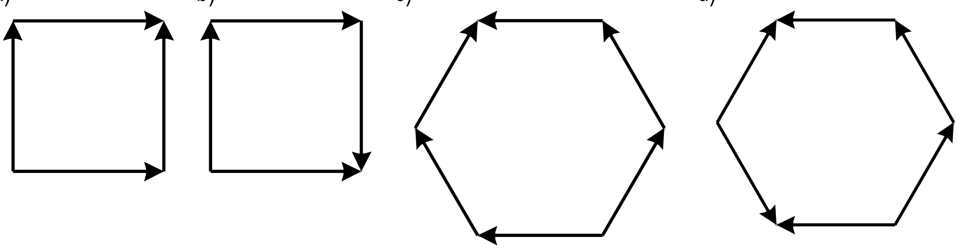
Pensando em Classe

Pensando em Classe

Questão 1

Determine o módulo do vetor resultante em cada um dos sistemas abaixo. Todos os vetores têm o mesmo módulo igual a 1:

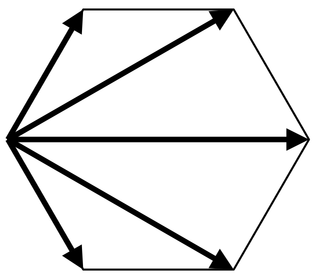
a) b) c) d)



Questão 2

A figura mostra um hexágono regular de lado **a** sobre o qual se apoiam 5 vetores. A resultante desses vetores tem módulo dado por :

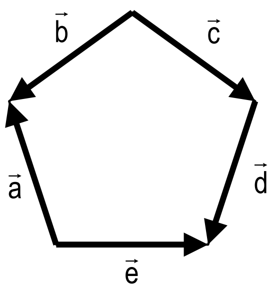
a) $3.a.\sqrt{3}$
b) 4.a
c) 6.a
d) $6.a.\sqrt{3}$
e) 12 a



Questão 3

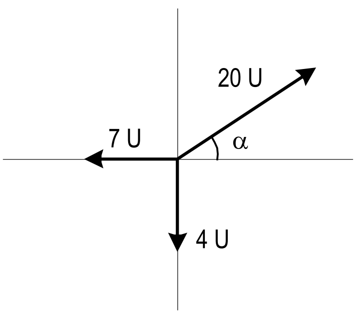
O esquema a seguir mostra cinco vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ e $\vec{e}$ apoiados sobre um pentágono regular. A relação vetorial que existe entre eles é:

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{e}$
b) $\vec{a} + \vec{e} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$
c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{0}$
d) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{e}$
e) $\vec{a} + \vec{e} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$



Questão 4

Através do **Método da Decomposição,** determine a resultante dos vetores do sistema abaixo:



sen α = 0,8
cos α = 0,6

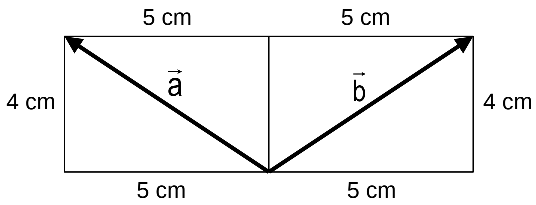
Questão 5

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ os dois vetores mostrados na figura a seguir. O prof Renato Brito pede para você :

a) determinar o módulo dos vetores $\vec{s}$ e $\vec{d}$ tais que $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

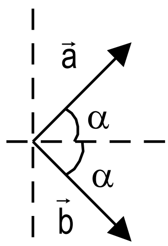
b) determinar a orientação dos vetores $\vec{s}$ e $\vec{d}$ de acordo com o seguinte código

(1)↑, (2)→ , (3)↓ e (4) ←



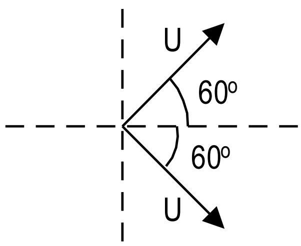
Questão 6

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ os dois vetores mostrados a seguir. Dado que $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 15$ cm , sen $\alpha = 0{,}8$ cos $\alpha = 0{,}6$, usando o método da decomposição, o prof Renato Brito pede que você determine o módulo dos vetores $\vec{s}$ e $\vec{d}$ tais que $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ e do vetor $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.



Questão 7

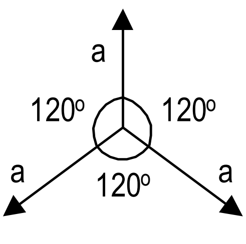
Dois vetores de mesma intensidade U formam entre um ângulo de 120°. Determine a intensidade da resultante deles.



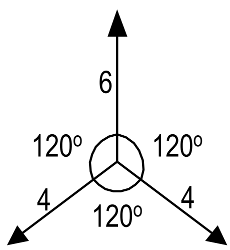
Questão 8

Usando o resultado da questão anterior, determine **mentalmente** a resultante dos vetores abaixo:

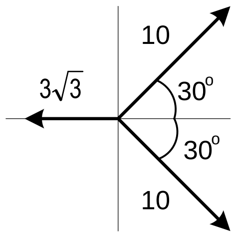
a)



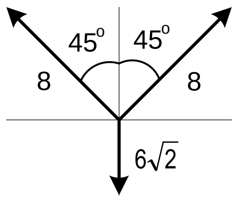
b)



c)



d)



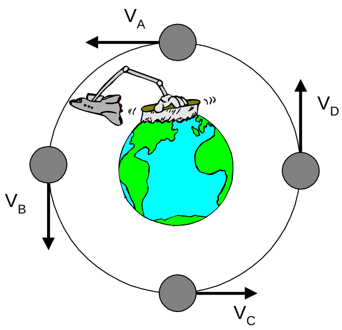
Questão 9

Considere que um satélite esteja girando em torno da Terra em movimento circular uniforme com velocidade escalar V constante. Pergunta-se:

a) a velocidade do satélite permanece constante durante o movimento, ou seja, $\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_C = \vec{V}_D$?

b) determine o módulo da variação da velocidade $\Delta\vec{V} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$ em função de V

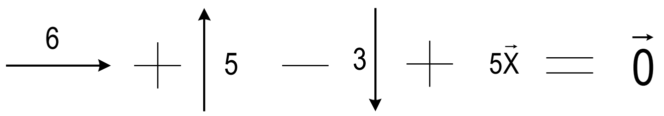
c) determine o módulo da variação da velocidade $\Delta\vec{V} = \vec{V}_C - \vec{V}_A$ em função de V



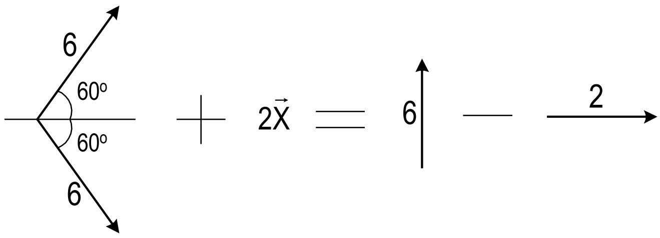
Questão 10

Resolva as seguintes equações vetoriais e determine o módulo do vetor $\vec{x}$ em cada caso:

a)



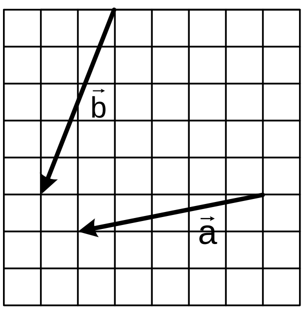
b)



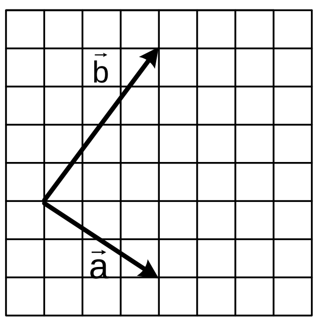
Questão 11

Em cada ítem abaixo, determine os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ fazendo uso dos versores unitários **i** e **j**, bem como o módulo do vetor diferença $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$. Admita que as células são quadrados de lado 1.

a)



b)



Dica: Atenção, só contamos quadradinhos na horizontal e na vertical. Na diagonal, quem conta para a gente é o Pitágoras, ok ? ☺

Questão 12

Duas forças F_1 e F_2 tem módulos respectivamente iguais a 6 N e 10 N. Assim, o módulo da força resultante R entre elas só pode assumir valores no intervalo:

a) $4 \leq R \leq 12$

b) $6 \leq R \leq 12$

c) $6 \leq R \leq 16$

d) $4 \leq R \leq 16$

Questão 13

Duas forças F_1 e F_2 tem módulos respectivamente iguais a 6 N e 8 N. Assim, a força resultante entre elas pode assumir qualquer um dos valores abaixo, exceto:

a) 4 N

b) 3 N

c) 2 N

d) 1 N

Questão 14

Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, de intensidades respectivamente iguais a 5 cm e 3 cm, formam entre si um ângulo $\alpha = 60^o$. O vetor $\vec{s}$ tal que $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, tem módulo:

a) 8 cm b) 7 cm c) 6 cm d) 9 cm e) 4 cm

Anotações

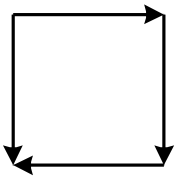
Anotações

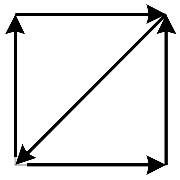
Pensando em Casa
Pensando em Casa

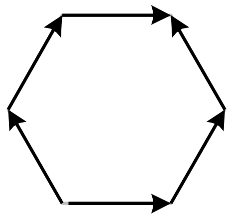
Para um bom aprendizado da física, o estudante deve inicialmente ler a teoria completa do capítulo, escrita pessoalmente pelo prof Renato Brito. Em seguida, deve rever todas as questões resolvidas em classe e que estão copiadas no seu caderno (o caderno é imprescindível !) . Só então, o aluno deve partir para a fixação dos conceitos na lista de exercícios de casa.

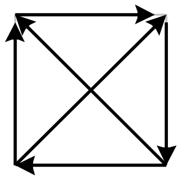
Questão 1 -

Determine o módulo do vetor resultante em cada um dos sistemas abaixo. Todas as figuras são polígonos regulares de lado 1

a)


b)


c)


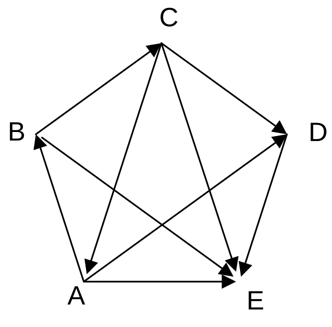
d)


O símbolo , no começo de algumas questões, indica que aquelas questões encontram-se resolvidas no Manual de Resoluções que encontra-se anexado a essa apostila, a partir da página 415

Questão 2 -

O vetor resultante da soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA}$ é:

a) $\overrightarrow{AE}$
b) $\overrightarrow{AD}$
c) $\overrightarrow{CD}$
d) $\overrightarrow{CE}$
e) $\overrightarrow{BC}$



Questão 3 -

Seis vetores de mesmo módulo F estão dispostos em série, um após o outro, formando um hexágono regular, de modo que a resultante deles é nula. Se o prof. Renato Brito inverter o sentido de apenas um dos vetores, a força resultante nesse sistema passa a valer:

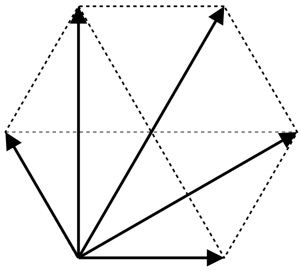
a) F
b) 2F
c) 3F
d) 5F
e) 4F


Anotações

Questão 4 -

A figura mostra um hexágono regular de lado **a** sobre o qual se apoiam 5 vetores. A resultante desses vetores tem módulo dado por :

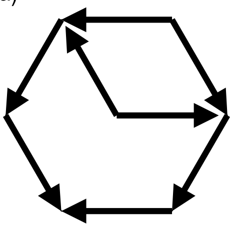
a) $3.a.\sqrt{3}$
b) 4.a
c) 6.a
d) $6.a.\sqrt{3}$
e) 12 a

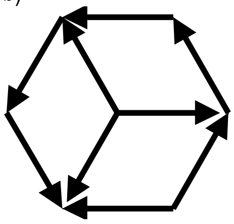


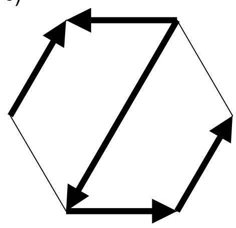
Dica: Veja a questão 2 de classe

Questão 5 -

Nos sistemas abaixo, os vetores têm mesma intensidade **a** e estão dispostos ao longo de um hexágono regular. Determine a resultante dos vetores em cada caso, sem efetuar cálculos, usando apenas as propriedades aprendidas nas questões de aprendizagem.

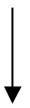
a)


b)


c)


Questão 6

Suponha agora que uma bola de frescobol que se movia horizontalmente com velocidade $\vec{V}_1$ de módulo 30 m/s, colide elasticamente com o solo horizontal de acordo com a figura e retorna com velocidade $\vec{V}_2$ de módulo 20 m/s. Qual dos vetores abaixo melhor representa a variação da velocidade vetorial $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ da bola durante a ocasião ?

a)

60 m/s

b)

50 m/s

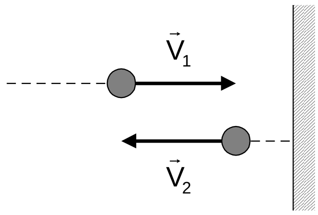
c)

10 m/s

d)

10 m/s

e) NULA

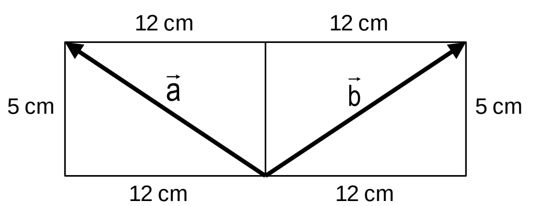


Colisão da bola

Questão 7 -

A figura mostra dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de mesma intensidade. Os vetores $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ têm módulo respectivamente iguais a:

a) 13 cm, 24 cm
b) 10 cm, 24 cm
c) 16 cm, 26 cm
d) 26 cm, 0 cm
e) 24 cm, 10 cm

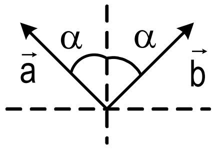


Anotações

Questão 8

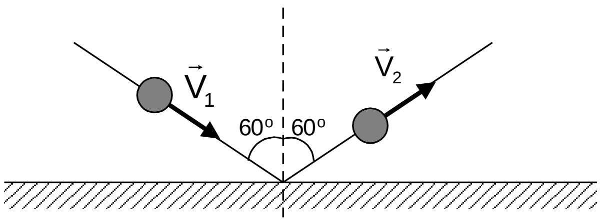
Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ os dois vetores a seguir. Usando o método da decomposição, determine o módulo do vetor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ e do vetor $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

Dado: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 10$ cm , sen $\alpha = 0{,}6$ cos $\alpha = 0{,}8$



Questão 9

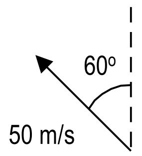
Uma bola de tênis, movendo-se com velocidade $\vec{V}_1$ de módulo 50 m/s, colide elasticamente com o solo horizontal de acordo com a figura e retorna com velocidade $\vec{V}_2$ de mesmo módulo 50 m/s.

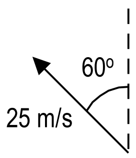


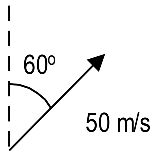
Determine qual dos vetores a seguir melhor representa a variação da velocidade vetorial $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ da bola durante a ocasião.

a) 

b) 

c) 

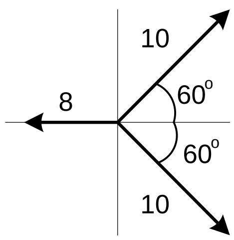
d) 

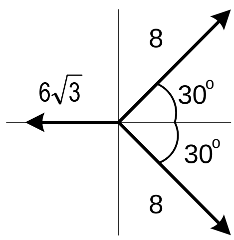
e) 

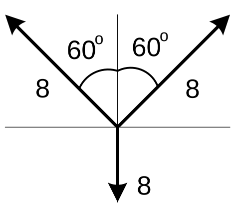
Dica: veja exemplo resolvido 2 – página 4

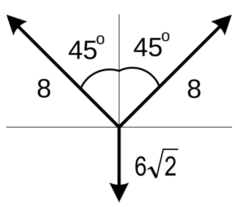
Questão 10

Determine **m e n t a l m e n t e** a resultante dos vetores abaixo em cada caso:

a) 

b) 

c) 

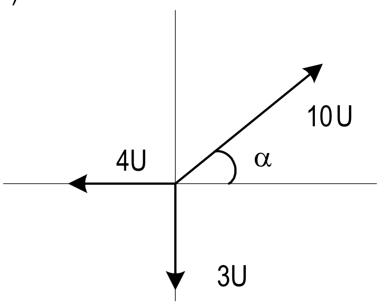
d) 

Anotações

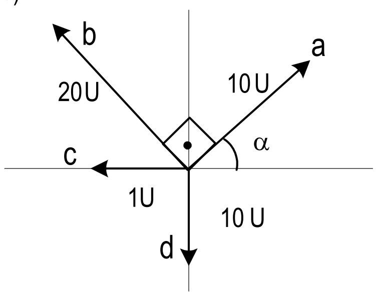
Questão 11 -

Através do **Método da Decomposição,** determine a resultante dos vetores para cada sistema abaixo. Dado senα = 0,6 e cosα = 0,8

a)



b)



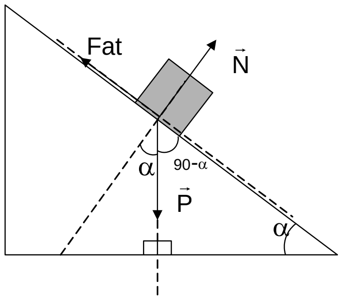
Dica: o vetor b faz um ângulo α com a vertical. Por que ?

O símbolo , no começo de algumas questões, indica que aquelas questões encontram-se resolvidas no Manual de Resoluções que encontra-se anexado a essa apostila, a partir da página 415

Questão 12

Na figura abaixo, uma caixa de 20 kg encontra-se em equilíbrio estático sobre um plano inclinado que forma um ângulo α = 36° com a horizontal, graças à força de atrito. Se a gravidade local vale g = 10 m/s^2, decomponha a força peso e, em seguida, determine (senα = 0,6 cosα = 0,8):
a) o valor da força normal N
b) o valor da força de atrito.

Dica: veja exemplo resolvido 1 – página 3



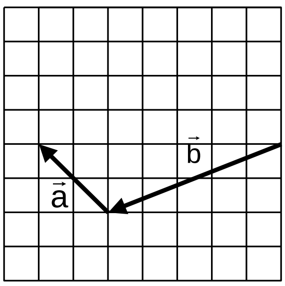
Questão 13 -

Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tem intensidades respectivamente iguais a 8 cm e 7 cm. Determine o ângulo α formado entre esses vetores, para que a resultante deles tenha módulo igual a 13 cm.

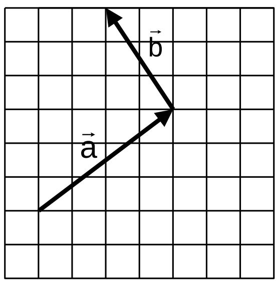
Questão 14 -

Determine o módulo do vetor diferença $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ em cada um dos sistemas abaixo. Admita que as células são quadrados de lado 1 e use o Método do Polígono ou do Paralelogramo.

a)



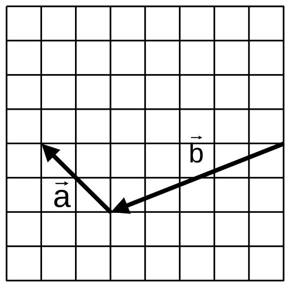
b)



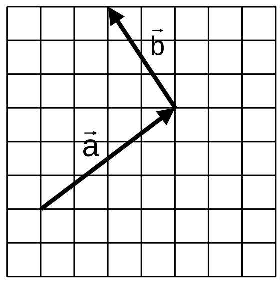
Questão 15 -

Em cada ítem abaixo, determine os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ fazendo uso dos versores unitários **i** e **j**, bem como o módulo do vetor diferença $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$. Admita que as células são quadrados de lado 1.

a)



b)



Dica: veja explicação e exemplo resolvido nas páginas 6 e 7.

Questão 16 -

Duas bolas de sinuca A e B, de massas $m_A = 4$ kg e $m_B = 2$ kg, se movem sobre um plano horizontal liso em movimento uniforme, com velocidades $\vec{V}_A = (3.i + 5.J)$ e $\vec{V}_B = (6.i - 1.J)$ em m/s. Determine o módulo da velocidade $\vec{V}_{cm}$ do centro de massa desse sistema, dada pela fórmula abaixo:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_A.\vec{V}_A + m_B.\vec{V}_B}{m_A + m_B}$$

Questão 17

Determine o módulo e a orientação aproximada do vetor que resulta em cada sentença vetorial a seguir:

a) $3.(2\uparrow) - 4.(3\rightarrow) + 2.(2\rightarrow) =$ **(exemplo resolvido)**

$= (6\uparrow) + (12\leftarrow) + (4\rightarrow) =$

$= (6\uparrow) + (8\leftarrow) =$

$= 10\nwarrow$

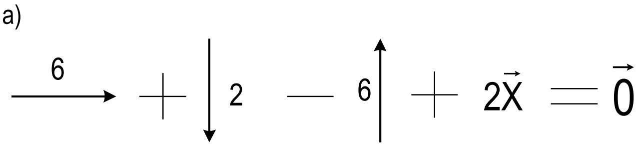
b) $(-3).(2\uparrow) + 4.(3\uparrow) - 2.(5\rightarrow) + 3.(6\rightarrow)$

c) $(-2).(7\uparrow) + 4.(4\rightarrow) + 2.(2\uparrow) - 3.(2\rightarrow)$

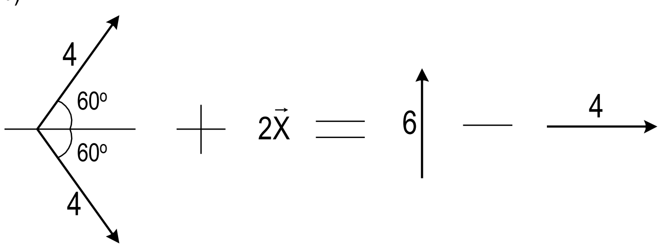
Questão 18 -

Resolva as seguintes equações vetoriais e determine o módulo do vetor $\vec{x}$ em cada caso:

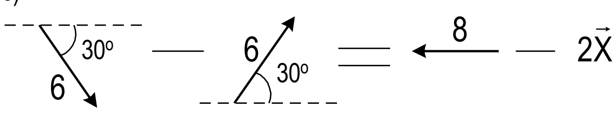
a)



b)



c)



Anotações

Questão 19

Duas forças F_1 e F_2 tem módulos respectivamente iguais a 6 N e 10 N. Assim, o módulo da força resultante R entre elas só pode assumir valores no intervalo:

a) $4 \leq R \leq 12$

b) $6 \leq R \leq 12$

c) $6 \leq R \leq 16$

d) $4 \leq R \leq 16$

Dica: veja questão 12 de classe

Questão 20

Duas forças F_1 e F_2 tem módulos respectivamente iguais a 6 N e 8 N. Assim, a força resultante entre elas pode assumir qualquer um dos valores abaixo, exceto:

a) 4 N

b) 3 N

c) 2 N

d) 1 N

Questão 21 - (Medicina Christus 2013)

Suponha que dois músculos com uma inserção comum, mas diferentes ângulos de tração se contraiam simultaneamente como mostra a figura ao lado. O ponto "O" representa a inserção comum dos músculos vastos lateral e medial, do quadríceps da coxa, na patela.

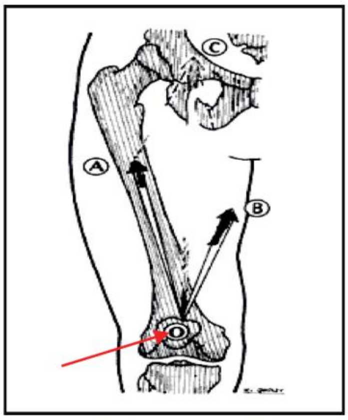
$\overrightarrow{OA}$ é o vetor que descreve a tração do vasto lateral.

$\overrightarrow{OB}$ é o vetor que descreve a tração do vasto medial.

Sendo os dois vetores de módulos iguais a 10u e 15u, o intervalo que representa a variação possível para o módulo do vetor soma V é:

a) 1 u $\leq$ v $\leq$ 1,5 u.
b) 5 u $\leq$ v $\leq$ 25 u.
c) 10 u $\leq$ v $\leq$ 15 u.
d) 15 u $\leq$ v $\leq$ 25 u.
e) 25 u $\leq$ v $\leq$ 150 u.

Dica: veja questão 19 de casa



Fonte figura: www.bertolo.pro.br

Respostas das Questões de Casa

1) a) 2 , b) $\sqrt{2}$, c) 4, d) 2
2) D
3) B
4) C
5) a) 3a, b) 2a, c) nula
6) B
7) B
8) é só decompor ☺ , s = 16, d = 12
9) B
10) a) $\rightarrow$ 2, b) $\rightarrow 2\sqrt{3}$, c) nulo, d) $\uparrow 2\sqrt{2}$
11) a) 5 b) 13
12) a) N = P. cosα = 160N
    b) Fat = P. senα = 120N
13) 60°
14) a) 5 , b) 6
15) a) 5 , b) 6
16) 5 m/s
17) b) $\nearrow$ 10, c) $\searrow 10\sqrt{2}$
18) a) 5 , b) 5, c) 5
19) D
20) D
21) B

Na próxima página, seguem as resoluções das questões de casa nas quais os alunos têm mais dúvidas.

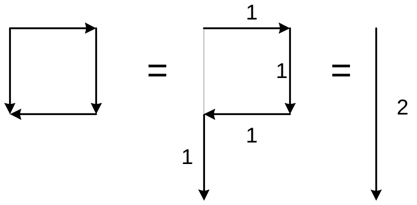
Todas as questões de classe serão resolvidas em vídeo, por esse motivo, a apostila não traz as respostas das questões de classe.

AULA 1 - VETORES

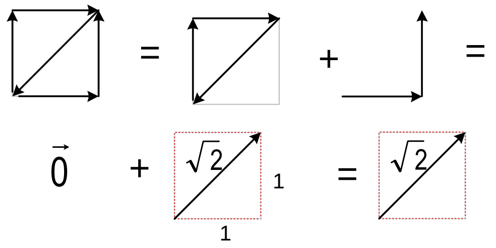
RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES MAIS DIFÍCEIS DE CASA

Aula 1 - Questão 1 - resolução

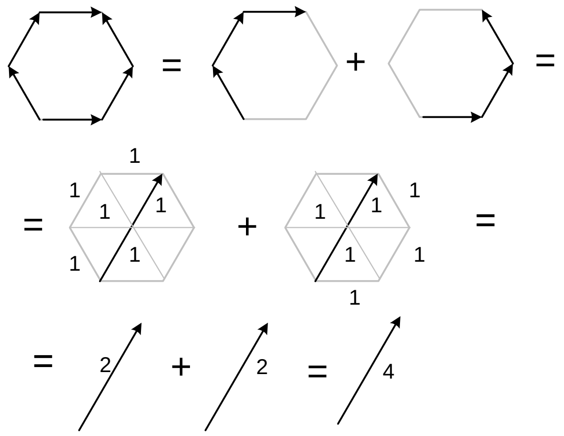
a)



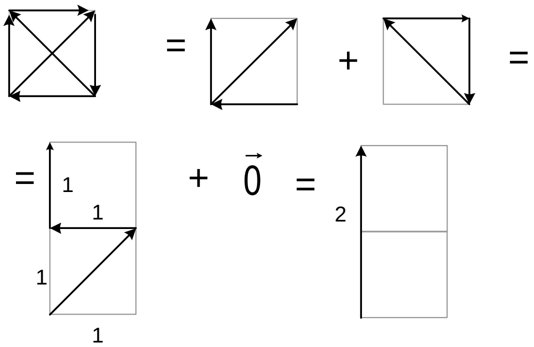
b)



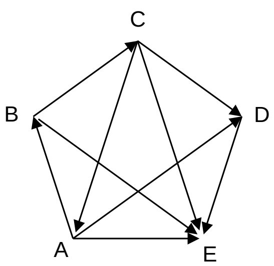
c)



d)



Aula 1 - Questão 2 - resolução



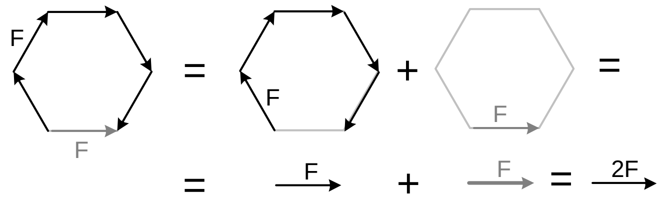
observando a figura da questão, note que:

AB + BE = AE e CA + AE = CE

assim, o prof Renato Brito pode escrever:

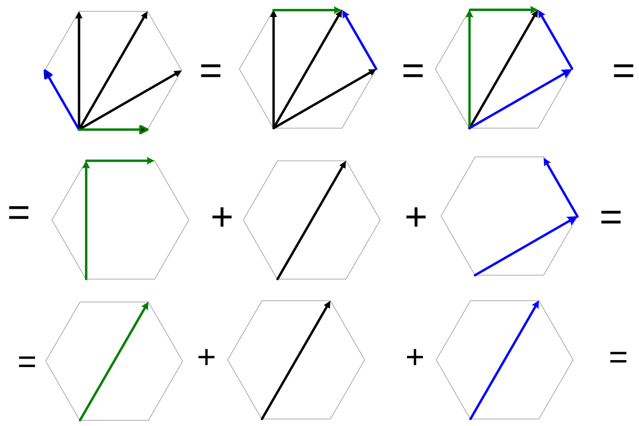
AB + BE + CA = (AB + BE) + CA = (AE) + CA = CA + AE = CE

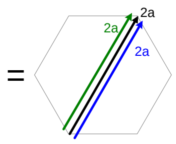
Aula 1 - Questão 3 - resolução



Aula 1 - Questão 4 - resolução

reposicionando os vetores , temos:

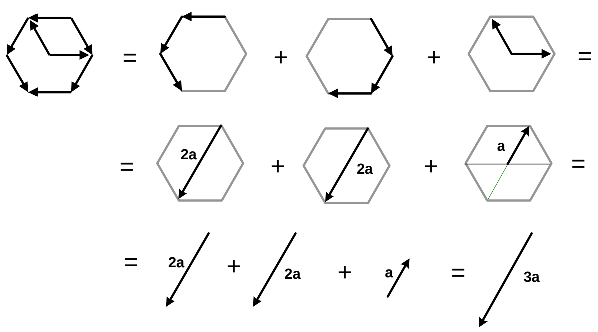




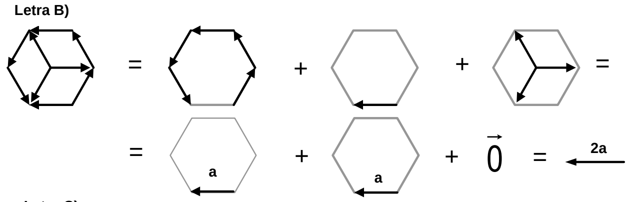
A resultante terá módulo 2a+2a+2a = 6a
resposta correta: Letra C

Questão 5 - resolução

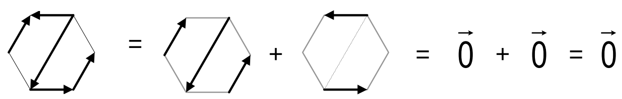
Letra A)



Letra B)

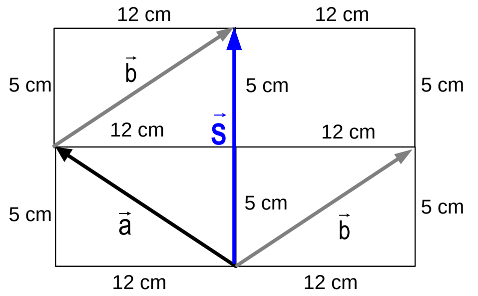


Letra C)



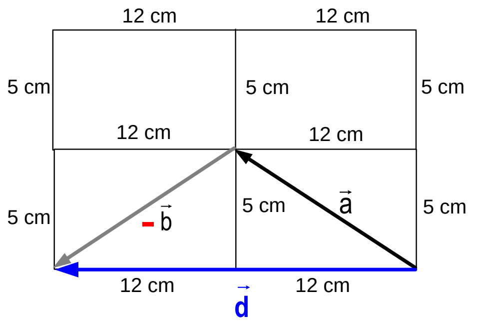
Aula 1 - Questão 7 – resolução alternativa

Deslocando, convenientemente, o vetor b, prontamente determinamos o vetor soma a graficamente. o seu módulo, como se pode verificar na figura abaixo, vale s = 5 + 5 = 10 cm



para achar o vetor $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, encare essa operação de subtração como uma operação de soma : $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Prontinho, para o prof Renato Brito determinar o módulo de $\vec{d}$, basta achar a resultante (+) entre os vetores $\vec{a}$ e $(-\vec{b})$ assim:

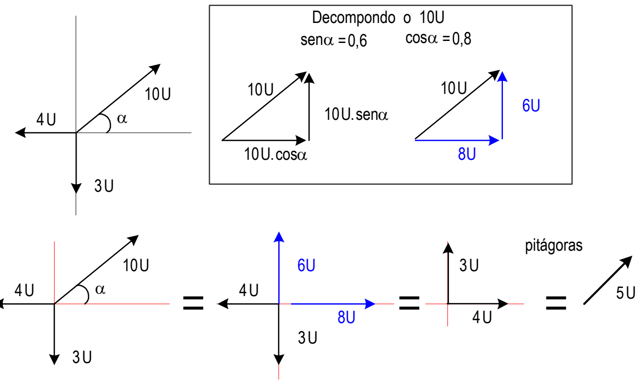


deslocando, convenientemente, o vetor $\vec{a}$, e invertendo a flecha do vetor $\vec{b}$, a fim de encontrar o vetor $-\vec{b}$, prontamente determinamos o diferença $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$ graficamente. o seu módulo, como se pode verificar na figura acima, vale :

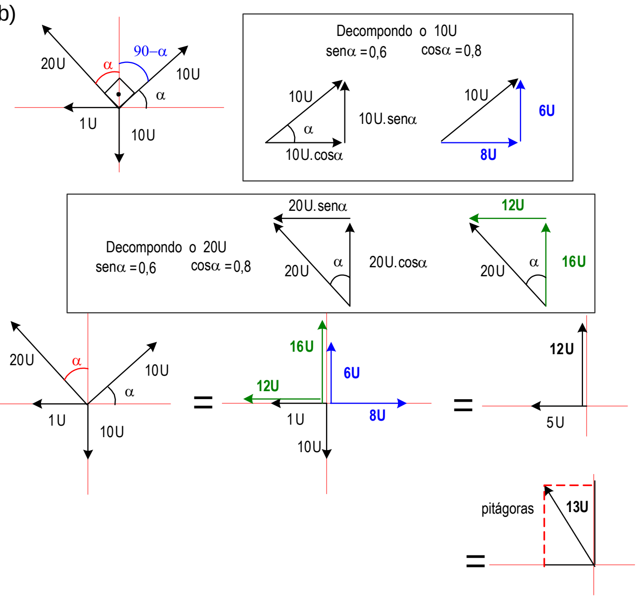
$$d = 12 + 12 = 24 \text{ cm}$$

Aula 1 - Questão 11 – resolução7

a)



b)



Aula 1 - Questão 13 - resolução

A expressão abaixo calcula o módulo da soma S entre dois vetores a e b que formam um ângulo α qualquer entre si

$S^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\alpha$

Segundo a questão, S = 13, a = 8, b = 7 , α = ?

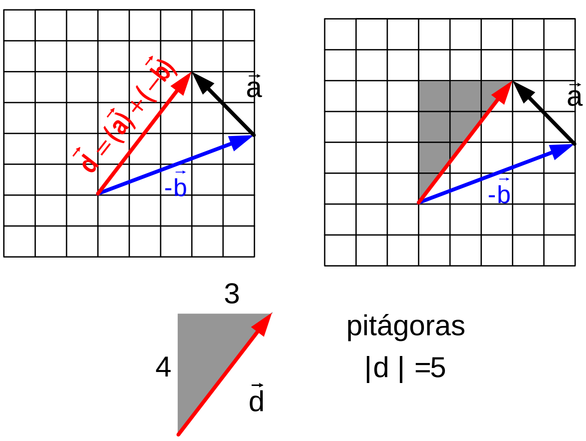
$13^2 = 8^2 + 7^2 + 2 \times 8 \times 7.\cos\alpha$

$169 - 64 - 49 = 112.\cos\alpha$

$56 = 112.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 60°$

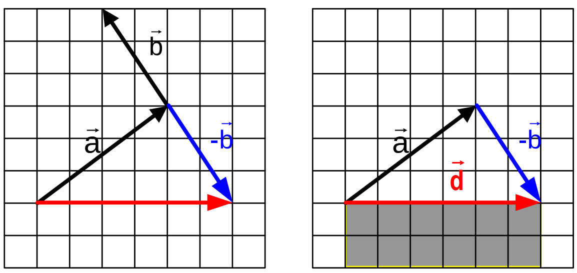
Aula 1 - Questão 14 - resolução

a)



pitágoras
|d | =5

b)



Contando quadradinhos vemos que : |d| =6

Aula 1 - Questão 15 - resolução

a) $\vec{a} = -2i + 2j$, $\vec{b} = -5i - 2j$

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = -2i + 2j - (-5i - 2j) = 3i + 4j$

$|\vec{d}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

b) $\vec{a} = +4i + 3j$, $\vec{b} = -2i + 3j$

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = +4i + 3j - (-2i + 3j) = 6i + 0j$

$|\vec{d}| = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6$

Aula 1 - Questão 16 – resolução

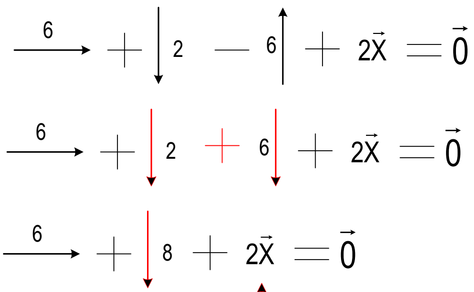
$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_A.\vec{V}_A + m_B.\vec{V}_B}{m_A + m_B} = \frac{4.(3.i + 5.J) + 2.(6.i - 1.j)}{4+2}$$

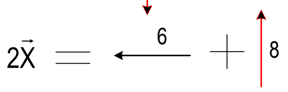
$$\vec{V}_{cm} = \frac{12.i + 20.j + 12.i - 2.j}{6} = \frac{24.i + 18.j}{6}$$

$$\vec{V}_{cm} = (4.i + 3.j)\ \text{m/s} \quad \Rightarrow \quad |\vec{V}_{cm}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\ \text{m/s}$$

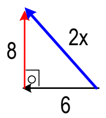
Aula 1 - Questão 18 - resolução

letra A - resolução:



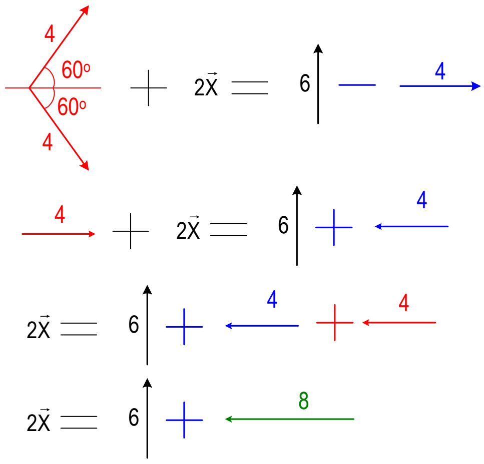


graficamente, vem:

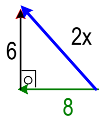


pitágoras:
$(2x)^2 = (8)^2 + (6)^2$
$2x = 10$
$x = 5$

letra B- resolução

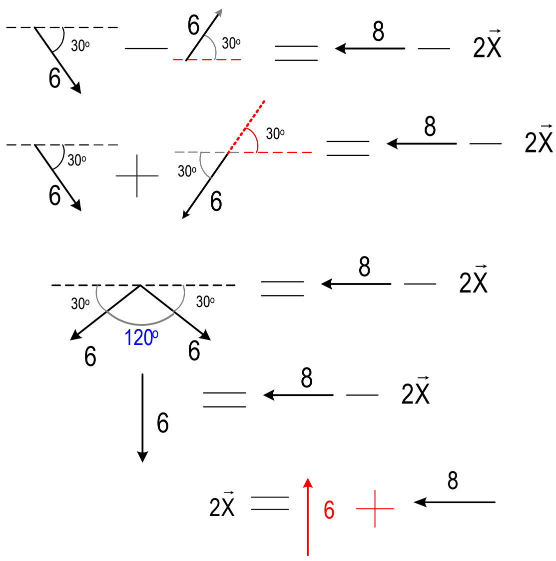


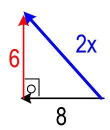
graficamente vem:



pitágoras
$(2x)^2 = (8)2 + (6)^2$
$2x = 10$
$x = 5$

letra C- resolução





pitágoras
$(2x)^2 = (8)2 + (6)^2$
$2x = 10$
$x = 5$